第5回スーパーコンピュータコンテスト予選問題

問題

世の中には様々な定数が知られている。今回はオイラー定数を数値的に精度良く求めることを問題とする。オイラー定数は以下の式によって定義される。

$$\gamma \equiv \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$$

ここで、$\ln n$ は $\log_e n$ のことで、自然対数を表す。

オイラー定数 γ を十進数で小数点以下 $N(12 \leq N \leq 30)$ 桁を正しく求めることとし、12桁を標準出力するプログラムを作成すること。

なおオイラー定数の値は　$\gamma = 0.5772156...$ である。プログラムを作成するにあたり、小数点以下 6 桁までを既値として用いることはかまわないが、組み込み関数等を使用することで 12 桁を「直接」求めることは認めない。

1　解説

一般に、こうした問題では、下記に示す様々な級数展開公式を用い、変数の値を一定の刻み幅で変化させ、かつ、求める値になるまで (収束) 計算を繰り返す。各公式によって、適切な刻み幅と収束回数は異なる。
オイラー定数を求めるための主な公式は次の通りである。

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-\cos x\right)\frac{1}{x}dx \tag{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\ln(x+1)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k\cdot(2k)!}\right] \tag{2}$$

$$\gamma = -\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}(\ln x-1)\,dx \tag{3}$$

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-1/x}\right)dx \tag{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}+\int_0^1\left\{\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{x}{(1-x)^2}\right\}dx \tag{5}$$

$$\gamma = -\ln\pi+\int_0^1\frac{1-\cos\pi x}{x}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\cos\pi x}{1+x}dx$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\cos\pi x}{(1+x)(2+x)}dx-\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{\cos\pi x}{x(1+x)(2+x)}dx \tag{6}$$

$$\gamma = \ln 2 - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh x}\right) dx \tag{7}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\ln x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k\cdot k!}\right] \tag{8}$$

これらの公式のどれ (または他の公式) を使うかは自由である。なお

$$\int_0^\infty f(x)dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx$$

であり、また実変数実数値関数 $f(x)$ において区間 $[a,b]$ で f''' が連続ならば

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] + \frac{(b-a)^2}{12n^2}\{f'(b)-f'(a)\}\right| < \frac{C}{n^4}$$

$$(n\to+\infty)$$

であることが知られている。ただし $x_k \equiv a + k(b-a)/n$ であり、C は　a, b, f によって定まる n に依らない定数である。

各公式中に現れる指数関数、対数関数、三角関数、π は次のような級数で置き換えることができる。

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} \quad (|x|<1)$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\tan^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k-1)}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} \quad (|x|<1)$$

$$\sinh x \equiv (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2 \quad (\text{双曲線正弦関数})$$

$$\pi = 16\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) \quad (\text{ Machin の公式 })$$

$$= 8\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 4\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \quad (\text{ Clausen の公式 })$$

$$= \frac{12}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{14}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\frac{1}{50}\right)^n$$

(Hutton の公式)

ただし

$$k!! \equiv \begin{cases} k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\cdots 2 & (k: \text{偶数} \geq 2) \\ k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\cdots 1 & (k: \text{奇数} \geq 1) \end{cases}$$

$$0!! \equiv 1$$

2　長い桁数の計算 (多倍長計算) について

多倍長の足し算 C = A + B を考えてみる。A、B、C は整数配列とし、それぞれの値は、配列要素の列で表わすことにする。たとえば、A=123456789123 ならば、

A[0]=1234, A[1]=5678, A[2]=9123
(10 進数で 1 要素あたり 4 桁格納すると仮定)

と表わせる。実際の計算は、

C[i] = A[i] + B[i],　　i=N, ..., 0 (N は最大要素番号)

を繰り返しながら、桁上がりが生じるたびに、必要な処理を行えばよい。

引き算は、基本的には足し算とほぼ同じである。

掛け算も、通常の掛け算と同じ考え方が使える。ただし、各配列要素同士で掛け算した結果が、配列要素で表現できる数の範囲を超えてはいけない。また、要素同士の掛け算の結果が決められた桁数 (今の場合 4 桁) を超えた場合の処理も必要である。

割り算は、除数が 4 桁以下の数である時は、直前の要素の計算の余りを考慮することで、通常の割り算と同じ考え方が使える。しかしながら、多倍長同士の割り算の場合には、除数の逆数を、被除数に乗じる方が計算速度が速くなり、次式を使うこともできる。

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^k}\right) \quad (|x| < 1)$$

3　精度

審査のために使用する計算機の int、long のサイズはそれぞれ 32bit、64bit を仮定する。

4　提出物

(1) 予選課題を解くプログラム
テキスト形式のファイル。

(2) 実行結果
実行したマシン名、コンパイラ、実行結果及び実行時間を記したテキスト形式のファイル。

(3) 予選課題解答プログラムの解説
テキスト形式あるいは標準的な LaTeX、TeX のファイル。
以下の事項をレポート用紙 5 枚 (A4) 以内でまとめたもの。

(3-1) アルゴリズム

(3-2) プログラムの説明

(3-3) 高速化技法など工夫した点に関する説明

5　審査基準

解答の正確さ、速さを基準とします。